

ALEKSANDER JABŁOŃSKI

(Warszawa)

O SZEROKOŚCI NATURALNEJ LINIJ WIDMOWYCH

§ 1. Wstęp

KLASYCZNYM modelem elementarnego źródła światła jest drgający harmonicznie dipol elektryczny, t. zw. oscylator harmoniczny. Gdyby drgania takiego oscylatora nie ulegały tłumieniu, emitowałby on światło ściśle monochromatyczne. W atomie B o h r a częstość emitowana równa jest podzielonej przez stałą P l a n c k a h różnicy energii, odpowiadających poziomom energetycznym, pomiędzy którymi zachodzi przejście. Ponieważ energie te w atomie B o h r a są ściśle oznaczone (poziomy energetyczne są zupełnie ostre), można byłoby się spodziewać, że atom taki emitować będzie częstości zupełnie określone, to znaczy promieniowanie ściśle monochromatyczne. Istnieje jednak szereg przyczyn, które sprawiają, iż linie widmowe nie są nigdy monochromatyczne, lecz posiadają zawsze pewną szerokość. Teorie rozszerzenia linii widmowych były rozwinięte jeszcze na gruncie klasycznym; badania ostatnich lat wykazały, iż nowe teorie kwantowe dają naogół wyniki podobne. Można więc z pewnością zastrzeżeniami jeszcze i obecnie korzystać z klasycznych teorii szerokości linii widmowych traktując atom jako t. zw. oscylator „wirtualny“.

Następujące przyczyny powodują rozszerzenie linii widmowych:

- 1^o Gaśnięcie oscylatora wirtualnego wskutek tracenia energii przez promieniowanie.
- 2^o Ruch cieplny atomów, powodujący przesunięcia częstości dzięki efektowi D o p p l e r a.
- 3^o Wzajemne oddziaływania atomu promieniującego i atomów otaczających.

Dwie ostatnie przyczyny powodują również i rozszerzenie linii absorbcyjnych. Postać zaś linii absorbcyjnej atomu nieruchomego i niezakłóconego przez cząsteczki otaczające, jest, jak wykazuje teoria, analogiczna do linii emisyjnej, emitowanej przez gaśnący oscylator wirtualny.

Podamy tu przedewszystkiem kilka potrzebnych w dalszym ciągu definicji.

Wielkość pochłaniania jest określona przez współczynnik κ , który jest

funkcją częstości kołowej ω (ilości drgań w 2π sekund); κ zdefiniowane jest przez wzory:

$$A(\omega)d\omega = (1 - e^{-\frac{4\pi\kappa}{\lambda_0}l})d\omega; \quad \lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega},$$

gdzie $A(\omega)d\omega$ jest stosunkiem amplitudy fali świetlnej po przejściu warstwy pochłaniającej o grubości l do amplitudy fali światła na tę warstwę padającego, n — współczynnik załamania ośrodka pochłaniającego i λ_0 długość fali w próżni. Dla warstw nieskończenie cienkich $A(\omega) \sim n\kappa$.

Mówiąc o rozkładzie natężeń w linii widmowej (postaci linii) mamy zawsze na myśli (tak w przypadku absorpcji, jak i emisji) rozkład, otrzymywany dla warstw absorbujących lub emitujących nieskończenie cienkich. W przypadku absorpcji rozkład będzie więc wyznaczony przez $n\kappa(\omega)d\omega$. Rozkład w linii emisyjnej, $I(\omega)d\omega$, w przypadku warstw o skończonej grubości zniekształcany jest przez reabsorbację w warstwie emitującej.

Szerokością połówkową nazywamy wielkość δ , spełniającą równanie:

$$I(\omega_0 + \delta) = \frac{1}{2}I(\omega_0),$$

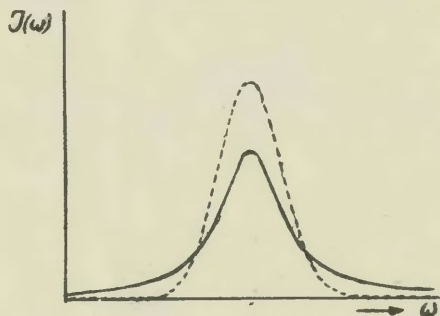
gdzie ω_0 jest częstością odpowiadającą $I = \text{maximum}$.

Najczęściej spotykanymi postaciami linii widmowych są:

postać dyspersyjna $I(\omega) = \text{Const.} \frac{\delta}{(\omega - \omega_0)^2 + \delta^2}$

postać dopplerowska $I(\omega) = \text{Const.} \frac{1}{\delta} \cdot l^{-\frac{\ln 2}{\delta^2}(\omega - \omega_0)^2}$

Rys. 1 przedstawia te dwie postacie linii dla tych samych szerokości połówkowych i o tem samym natężeniu całkowitem ($\int_0^\infty I(\omega)d\omega$). Zauważmy tu, iż większość czynników powodujących rozszerzenie linii nie powoduje zmiany całkowitego jej natężenia.



Rys. 1. Postać dyspersyjna (—). Postać dopplerowska (.....).

¹ Podług artykułu V. Weisskopa, Phys. Zt. 34, 1, 1933.

§ 2. Naturalna szerokość

Drgania oscylatora wirtualnego doznają tłumienia wskutek wypromieniowywania energii. Drgania gasnące oscylatora przedstawia równanie:

$$(1) \quad m\ddot{u} + au + b\dot{u} = 0,$$

gdzie m — masa cząstki oscylującej, u — spółrzędna cząstki, a — stała siły quasi-sprężystej, $b\dot{u}$ — wyraz, wyrażający tłumienia oscylatora.

Całka tego równania jest dana przez wyrażenie:

$$u = u_0 \cdot e^{-\frac{\gamma}{2} t} \cdot e^{\pm i \omega t},$$

gdzie

$$(2) \quad \gamma = \frac{b}{m},$$

i

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{a}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}, \text{ lub dla } \gamma \leq \omega_0:$$

$$(3) \quad \omega_0 \cong \sqrt{\frac{a}{m}}.$$

Ponieważ energia oscylatora jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy drgań, przeto zanik energii oscylacyjnej E wyrazi się wzorem:

$$E = E_0 \cdot e^{-\gamma t},$$

gdzie E_0 wyraża energię drgań w chwili $t = 0$.

Przyjmujemy, że atomy są zbudowane z jądra o ładunku dodatnim oraz elektronów o masach bardzo znacznie mniejszych od masy jądra. Ponieważ w czasie drgań środek masy drgającego układu pozostaje w spoczynku, można więc przyjąć, iż stosunkowo ciężkie jądro w drganiach nie uczestniczy, a drgają jedynie elektrony. Moment elektryczny atomu będzie wtedy proporcjonalny do wychylenia elektronu „optycznego”:

$$p = u \cdot e,$$

gdzie e oznacza ładunek elektronu. (Elektronem „optycznym” nazywamy elektron, który czynimy odpowiedzialnym za emisję i absorbcję światła; „światło” należy tu rozumieć w ściślejszym tego słowa znaczeniu).

Zmienny moment elektryczny atomu wyrazi się przez:

$$p = e \cdot u = p_0 \cdot e^{-\frac{\gamma}{2} t} \cdot e^{\pm i \omega_0 t},$$

(4) lub też, wyrażony przez wielkości rzeczywiste

$$p(t) = p_0 \cdot e^{-\frac{\gamma}{2} t} \cdot \cos(\omega_0 t + \vartheta),$$

gdzie ϑ jest fazą drgania w chwili $t = 0$.

Jak wykazuje teoria, stała γ dla klasycznego oscylatora równa jest:

$$\frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \cdot \omega_0^2,$$

przy założeniu, iż strata energii zachodzi jedynie na promieniowanie.

Amplitudy wektora świetlnego światła wypromieniowanego są proporcjonalne do amplitud dipola drgającego.

Przyjmując, iż oscylator spoczywa od $t = -\infty$ do $t = 0$, w chwili $t = 0$ zostaje nagle wzbudzony i od $t = 0$ do $t = +\infty$ drgania jego zanikają zgodnie ze wzorem (1), możemy przedstawić tak zdefiniowaną funkcję p zapomocą zbieżnej całki Fouriera:

$$(5) \quad p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega.$$

Spółczynnik $a(\omega)$ otrzymamy ze wzoru:

$$(6) \quad a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} p(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{p^0}{4\pi} \left[\frac{-e^{i\delta}}{i(\omega - \omega_0) - \frac{\gamma}{2}} + \frac{e^{-i\delta}}{i(\omega + \omega_0) + \frac{\gamma}{2}} \right]$$

Światło o dostrzegalnym natężeniu powstaje tylko wówczas, gdy zachodzi jeden po drugim cały szereg aktów wzbudzenia i emisji. Przyjmując, iż każde nowe wzbudzenie zachodzi wówczas, gdy poprzednie zanikło już niemal całkowicie, możemy średnią czasową wyemitowanej przez oscylator energii wyrazić jak następuje:

$$(7) \quad \overline{p^2} = \frac{1}{T} \int_0^T p^2(t) dt = \frac{n}{N} \sum_{i=1}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} p^2(t) dt,$$

gdzie n jest ilością wzbudzeń zachodzących w przeciągu jednej sekundy, zaś N — ilością wzbudzeń w przeciągu T sekund. $t_1, t_2, t_3 \dots t_i \dots$ oznaczają chwile, w których zachodzą kolejne wzbudzenia. Przy uwzględnieniu

naszych założeń, wszystkie całki $\int_{t_i}^{t_{i+1}} p^2(t) dt$ są sobie równe, co daje przy

uwzględnieniu (5) i (6):

$$(8) \quad \overline{p^2} = n \int_0^{\infty} p^2(t) dt = 4\pi n \int_0^{\infty} |a(\omega)|^2 d\omega,$$

gdzie:

$$(9) \quad |a(\omega)|^2 = \frac{p_0^2}{16\pi^2} \left\{ \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} + \frac{1}{(\omega_0 + \omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} - \right. \\ \left. - 2 \frac{\left[\omega_0^2 - \omega^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \right] \cos 2\delta + \gamma \omega_0 \sin 2\delta}{\left[\omega_0^2 - \omega^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \right]^2 + \omega_0^2 \gamma^2} \right\}.$$

Zgodnie z założeniem, w najkrótszym nawet przedziale czasu, w którym możliwe są jeszcze jakiejkolwiek pomiary natężenia, zachodzi bardzo wielka liczba aktów wzbudzenia, przyczem faza początkowa dla każdego z aktów wzbudzenia jest zupełnie dowolna. Dostępna obserwacji jest jedynie wartość średnia $\overline{|a(\omega)|^2}$, w której ostatni wyraz (9) znika. W pobliżu środka linii ($\omega = \omega_0$) wyraz drugi staje się bardzo małym w porównaniu z wyrazem pierwszym; możemy więc go opuścić.

Ostatecznie otrzymujemy na rozkład natężeń w linii emisyjnej wzór:

$$(10) \quad I(\omega) d\omega = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} d\omega,$$

gdzie stała $\frac{\gamma}{2\pi}$ jest tak dobrana, aby natężenie całkowite linii $\int_0^{+\infty} I(\omega) d\omega = 1$.

Aby otrzymać postać linii absorbcyjnej, rozważmy oscylator wykonujący drgania wymuszone pod wpływem zmiennego pola elektrycznego $E = E_0 \cdot e^{i\omega t}$. Siła działająca na elektron równa jest $e \cdot E$, gdzie e jest ładunkiem elektronu.

Równanie drgań wymuszonych będzie miało postać:

$$(11) \quad m\ddot{u} + a\dot{u} + bu = e \cdot E_0 \cdot e^{i\omega t}.$$

Całkę ogólną otrzymamy, dodając do jakiejkolwiek całki szczególnej tego równania, całkę ogólną równania jednorodnego (1).

Całka ogólna równania (1) przedstawia drgania gasnące. Dla t dostatecznie dużych może ona być całkowicie pominięta. Pozostanie więc jedynie całka szczególna równania (11):

$$u = u_0 \cdot e^{i\omega t}.$$

Podstawiając to wyrażenie w (11), otrzymamy:

$$u_0(-m\omega^2 + a + i b\omega) = e \cdot E_0;$$

dzieląc przez m i uwzględniając (2) i (3), otrzymamy na amplitudę momentu elektrycznego drgania wymuszonego:

$$p_0 = e \cdot u_0 \simeq \frac{\frac{e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega_0} E_0,$$

zaś na moment:

$$(11) \quad p = \frac{\frac{e^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega_0} \cdot E_0 \cdot e^{i\omega t}.$$

Otrzymaliśmy na amplitudę wielkość zespoloną, co wskazuje na przesunięcie fazy drgania wymuszonego względem fazy fali wzbudzającej. Wartość średnią pracy wykonanej przez oscylator w przeciągu 1 sekundy można wyrazić jako:

$$W = \overline{E \cdot \dot{p}} = \overline{E_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot \dot{p}};$$

dla ω bliskich ω_0 (przyjmując $\omega + \omega_0 \simeq 2\omega_0$)

$$W = \frac{\frac{e^2 E_0^2}{2\omega_0 m} \cdot \omega \cdot \frac{\gamma}{2}}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2};$$

wyrażenie to przedstawia energję o częstotliwości ω pochłoniętą przez oscylator w ciągu 1 sekundy.

Ilość energji pochłoniętej z wiązki o przekroju 1 cm^2 na drodze dl ,

$$dS = NWdl,$$

gdzie N oznacza ilość oscylatorów w 1 cm^3 ,

$$\text{zaś } S_l = \frac{E_l^2 \cdot c}{8\pi} = \frac{E_0^2 \cdot c \cdot e^{-\frac{4\pi}{\lambda_0} n \cdot l}}{8\pi}$$

$$\text{stąd: } dS = -\frac{E_l^2 \cdot c \cdot n \cdot \kappa}{2\lambda_0} dl = N W dl = N \frac{\frac{e^2 E_l^2}{2\omega_0 m} \cdot \omega \cdot \frac{\gamma}{2}}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} dl$$

stąd ostatecznie:

$$(13) \quad n \kappa = \frac{\frac{2\pi e^2}{\omega_0 m} N \cdot \frac{\gamma}{2}}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

Widzimy więc, że $n\kappa(\omega)$ jest proporcjonalne do $I(\omega)$. (10).

γ może służyć niejako miarą „mocy” oscylatora, lub też natężenia linii

widmowej, ponieważ stosunek ilości energii, wypromieniowywanej na jednostkę czasu do energii, jeszcze przez oscylator posiadanej, jest proporcjonalny do γ :

$$-\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = \gamma.$$

Dla dipolowego oscylatora klasycznego $\frac{\gamma}{2}$ równe jest szerokości połówkowej zarówno dla linii emisyjnych, jak i absorbcyjnych i zależy jedynie od położenia linii w widmie, czyli od ω_0 .

Całkowitą zgodność ze wzorem klasycznym otrzymano doświadczalnie w przypadku linii D sodu. K o r f wyznaczył nawet na podstawie pomiarów absorbcji w liniach D sodu stałą $\frac{e^2}{m}$ ²⁾.

Naogół jednak wartości γ , wyznaczone doświadczalnie, różnią się od wartości danej przez teorię klasyczną; aby otrzymać zgodność z doświadczeniem, należy wartość klasyczną γ pomnożyć przez pewien czynnik, o czym będzie mowa niżej.

Czas zaniku (średni) oscylatora (τ) oblicza się jak następuje:

$$(14) \quad \tau = \frac{\int_0^{\infty} t \cdot e^{-\gamma t} dt}{\int_0^{\infty} e^{-\gamma t} dt} = \frac{1}{\gamma}$$

W dawniejszej teorii kwantów wiązano na gruncie zasady odpowiedniości z czasem zaniku oscylatora wirtualnego średni czas życia atomu na pewnym poziomie, z którego przejście powoduje emisję linii widmowej.

Wyrażenie $e^{-\gamma t} = e^{-\frac{t}{\tau}}$ oznacza prawdopodobieństwo, iż atom wzbudzony do poziomu o średnim czasie życia τ pozostanie na tym poziomie w ciągu czasu t .

Ponieważ, jak już wspominaliśmy, teoria B o h r a daje ostre wartości energii poziomów, więc dla wytłumaczenia naturalnej szerokości linii należało albo odrzucić postulat B o h r a, głoszący, iż częstość emitowana jest równa podzielonej przez stałą P l a n c k a h różnicy energii poziomów, pomiędzy którymi zachodzi przejście, lub też przyjąć, że poziomy te są rozmyte.

W myśl pierwszej z tych hipotez, można przyjąć na postać lni wzór

²⁾ Astrophysical Journal, LXXVI, 124, 1932.

klasyczny, podstawiając na γ odwrotność czasu życia na poziomie wyjściowym dla linii emisyjnej.

W myśl drugiej z tych hipotez, atomy na określonym poziomie kwantowym nie posiadają wszystkie ściśle tej samej energii, lecz rozmaite, choć bardzo zbliżone do pewnej energii najprawdopodobniejszej.

Rozkład statystyczny rozmaitych wartości energii w zbiorze atomów, znajdujących się w określonym stanie wzbudzenia, lub też wagę statystyczną G_n termów (wyrazów) widmowych dla określonego poziomu (termem lub wyrazem widmowym nazywamy energię poziomu podzieloną przez stałą Plancka) daje wzór analogiczny do (10):

$$(15) \quad G_n(T) = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{(T_n - T)^2 + \left(\frac{\gamma_n}{2}\right)^2},$$

gdzie T oznacza pewną wartość termu, T_n — jego wartość najprawdopodobniejszą. γ_n równe jest odwrotności czasu życia $\frac{1}{\tau_n}$ na poziomie n i równe jest sumie prawdopodobieństw przejść z poziomu n na wszystkie inne możliwe:

$$(16) \quad j_n = 3 \sum_m f_{nm} \frac{g_m}{g_n} \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_{nm}^2}{m c^3},$$

gdzie f_{nm} oznacza t. zw. moc oscylatora (lub też — ilość elektronów dyspersyjnych) dla przejścia $n-m$, zaś g_n i g_m wagi statystyczne poziomów n i m . Jak już wspominaliśmy, wprowadzenie czynników f_{nm} okazało się koniecznym dla otrzymania zgodności teorii z doświadczeniem.

Rozmycia poziomów energetycznych należy się spodziewać już na podstawie zasady Heisenberga. Energji E stanu o średnim czasie życia τ nie możemy wyznaczyć z dokładnością większą niż do $\frac{h}{\tau}$, ponieważ $\Delta E \geq \frac{h}{\tau}$ (ΔE nieoznaczoność energii poziomu), lub też $\Delta E = \Delta(hT) \geq \frac{h}{\tau}$. Stąd $\Delta T = \frac{1}{\tau} \text{ sec}$. ΔT nie jest szerokości linii emitowanej, lecz szerokością termu widmowego atomu.

Czas życia atomu w stanie normalnym, jeśli nie znajduje się on w sferze działania niezwykle intensywnych czynników, mogących atom wzbudzić, jest, praktycznie biorąc, nieskończenie długi. Możemy więc przyjąć, że energia poziomu normalnego jest zupełnie ściśle oznaczona. W przypadku emisji linii rezonansowych przejścia odbywają się ze stanów wzbudzonych do nieskończenie wąskiego poziomu normalnego. A więc szerokość emitowanej linii rezonansowej równa jest, praktycznie biorąc, odwrotności czasu

życia na poziomie wzbudzonym. Dla wszystkich innych linii poza rezonansowymi szerokość linii zależy od szerokości każdego z poziomów, pomiędzy którymi zachodzi przejście. Jeżeli γ_n i γ_m oznaczają połówkowe szerokości dwóch takich poziomów, to rozkład natężeń w linii emitowanej wyraża, według Weiskopfa i Wignera³, wzór:

$$(17) \quad I(\omega) = \frac{\gamma_n + \gamma_m}{2\pi} \cdot \frac{1}{(\omega_{nm} - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma_n + \gamma_m}{2}\right)^2}$$

gdzie ω_{nm} jest częstością Bohrowską przejścia $n \rightarrow m$. W tym przypadku szerokość połówkowa linii emitowanej równa jest sumie szerokości połówkowych termów, pomiędzy którymi zachodzi przejście.

Zasada zachowania energii wymaga, aby suma algebraiczna odchyżeń od wartości Bohrowskich częstości linii emitowanych przez izolowany atom pojedynczy, spadający kaskadowo na poziom normalny poprzez poziomy pośrednie, była równa jedynie odchyleniu na poziomie najwyższym. Wartość termu poziomu pośredniego, osiągniętego przez spadek z poziomu wyższego, nie może się zmieniać w atomie izolowanym przez cały czas przebywania na tym poziomie, to znaczy do czasu, nim nie zajdzie dalszy spadek na jakikolwiek poziom niższy.

Do podobnych wyników prowadzi, oparta na teorii absorpcji i emisji światła Diraca, teoria V. Weiskopfa i E. Wignera⁴.

Naszkicujemy tu tę teorię w najogólniejszych zarysach.

Wyobraźmy sobie pojedynczy nieruchomy atom, zamknięty w przestrzeni próżnej, ograniczonej powierzchnią zamkniętą. Przyjmijmy dla prostoty, iż atom ten posiada oprócz poziomu normalnego tylko jeden poziom wyższy.

Pole elektromagnetyczne przestrzeni próżnej zamkniętej traktować należy, jak wykazali Born, Heisenberg i Jordan, jako wielkość skwantowaną. Drgania własne takiej przestrzeni uważać można za drgania układu oscylatorów. Energia np. s -tego oscylatora może przyjmować wartości: $W_s = h\nu(n_s + 1/2)$, $n_s = 0, 1, 2, 3 \dots$ ⁵. Ponieważ ilość różnych drgań własnych w takiej przestrzeni zamkniętej jest nieskończenie wielka, przeto nawet w przypadku, gdy żadne drganie własne nie jest wzbudzone, energia pola promieniowania (energia zerowa) jest nieskończenie wielka. Okoliczność ta wskazuje na niedoskonałość teorii Diraca. Dotychczas nie udało się tej trudności usunąć. Jednakże w teorii absorpcji i emisji

³ Zt. 1. Phys. 63, 54, 1930 i 65, 18, 1931.

⁴ l. c.

⁵ $\nu_{s+1} - \nu_s \rightarrow 0$, gdy objętość przestrzeni $\rightarrow \infty$.

wchodzą w grę jedynie różnice energii, które przyjmują jedynie wartości skończone.

Oznaczmy przez H_s energię pola promieniowania, H_A — energię atomu i przez U energię sprzężenia atomu z polem promieniowania.

Funkcja *H a m i l t o n a* dla całego układu wyrazi się jako:

$$(18) \quad H = H_s + H_A + U.$$

Wielkości te traktowane są w mechanice kwantowej jako macierze. Uważając $H_s + H_A = H_0$ za funkcję *H a m i l t o n a* dla układu niezakłóconego, zaś U za funkcję zakłócenia, można dla obliczenia prawdopodobieństwa przejścia energii wzbudzenia z atomu na którykolwiek z oscylatorów pola promieniowania, stosować rachunek zakłóceń. Niech w chwili $t=0$ atom znajduje się w stanie wzbudzonym, natomiast niech żaden z oscylatorów pola promieniowania wzbudzony nie będzie.

Niech $|b|^2$ oznacza prawdopodobieństwo zastania atomu w stanie wzbudzonym w jakiejkolwiek chwili t , w której wykonywamy odpowiednie doświadczenie, stwierdzające stan atomu, zaś $|a_k|^2$ odpowiednie prawdopodobieństwo znalezienia w polu promieniowania kwantu świetlnego o częstotliwości ω_k . Wielkości zespolone b i a_k otrzymuje się z równań teorii zakłóceń, które dają prawdopodobieństwa przejść z jednego stanu w inny.

Równania te można przedstawić w postaci:

$$(19) \quad \begin{cases} i\dot{b} = + \sum_k U_k e^{i(\omega_k - \omega_0)t} a_k, \\ i\dot{a}_k = U_k^* e^{-i(\omega_k - \omega_0)t} b, \end{cases}$$

gdzie U_k są podzielonemi przez $\frac{h}{2\pi}$ elementami macierzy U , wyrażającemi sprzężenie k -tego oscylatora pola promieniowania z atomem; U^* z gwiazdką oznacza wielkość zespoloną sprzężoną z U , zaś ω_0 — drgania własne atomu. Rozwiązanie, spełniające nasz warunek początkowy ($b=1$ dla $t=0$), jest:

$$b = e^{-\frac{\gamma}{2}t}.$$

Podstawiając je w drugie z równań (19), otrzymujemy:

$$i\dot{a}_k = U_k^* e^{[-\frac{\gamma}{2} + i(\omega_k - \omega_0)]t},$$

skąd całkując i uwzględniając warunek początkowy: $a_k = 0$ dla $t=0$:

$$a_k = -\frac{U_k}{i\frac{\gamma}{2} + i(\omega_k - \omega_0)} \left[e^{-\frac{\gamma}{2}t + i(\omega_k - \omega_0)t} - 1 \right].$$

Stąd prawdopodobieństwo znalezienia w polu promieniowania kwantu o częstości ω_k :

$$|a_k|^2 = \frac{|U_k|^2}{(\omega_k - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \left[e^{-\gamma t} - 2 \cos(\omega_k - \omega_0)t \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t} + 1 \right];$$

dla t dostatecznie dużych otrzymujemy:

$$(20) \quad |a_k|^2 \simeq \frac{|U_k|^2}{(\omega_k - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}.$$

Dla małego przedziału częstości, w pobliżu ω_0 , $|U_k|^2$ można, jak wykazuje teoria, uważać za wielkość stałą.

Otrzymujemy zatem rozkład prawdopodobieństw, a tem samem i rozkład natężeń, ten sam, co i otrzymany z teorii klasycznej. Wartość stałej γ daje się również w teorii kwantowej obliczyć.

Zaznaczyć należy, iż jest rzeczą niemożliwą stworzyć w praktyce warunki, w których atomy emitowałyby linie o postaci naturalnej. Możemy usunąć wpływy zakłócające cząsteczek otaczających przez dostateczne rozrzedzenie gazu i usunięcie domieszek, nie możemy jednak całkowicie usunąć wpływu ruchu termicznego atomów emitujących lub absorbujących, który ujawnia się w efekcie Dopplera. Postać obserwowana będzie wynikiem działania co najmniej dwóch czynników: gaśnięcia oscylatorów wirtualnych i efektu Dopplera. Nawet w najniższych, wchodzących w grę temperaturach.

ANTONI ZYGMUND

(Wilno)

O ZACHOWANIU SIĘ PEWNYCH SZEREGÓW
FUNKCYJNYCH¹

§ 1

Rozważmy dwie tablice liczb rzeczywistych:

$$\begin{array}{ll}
 & p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \dots, p_n^{(1)}, \dots & x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \dots \\
 (P) & p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, \dots, p_n^{(2)}, \dots & (X) \quad x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}, \dots \\
 & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 & p_1^{(m)}, p_2^{(m)}, \dots, p_n^{(m)}, \dots & x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}, \dots \\
 & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
 \end{array}$$

Zakładamy, że 1^o elementy pierwszej tablicy są dodatnie i suma wyrazów w każdym wierszu równa się, 2^o odpowiadające sobie wiersze obu tablic zawierają dokładnie tę samą liczbę wyrazów (skończoną lub nie)². Przy pomocy tych tablic można utworzyć w przedziale $0 \leq t \leq 1$ ciąg nieskończony funkcji $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$, ... w sposób następujący. Funkcję $\varphi_1(t)$ kładziemy równą $x_1^{(1)}$ wewnątrz przedziału $(0, p_1^{(1)})$, równą $x_2^{(1)}$ wewnątrz przedziału $(p_1^{(1)}, p_1^{(1)} + p_2^{(1)})$, równą $x_3^{(1)}$ wewnątrz $(p_1^{(1)} + p_2^{(1)}, p_1^{(1)} + p_2^{(1)} + p_3^{(1)})$ i t. d. Przedziały te nazwijmy przedziałami pierwszego rzędu. Dla określenia $\varphi_2(t)$ rozważamy dowolny przedział pierwszego rzędu, dzielimy go na części (przedziały 2-go rzędu) o długościach kolejno proporcjonalnych do $p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, \dots, p_n^{(2)}, \dots$ i kładziemy, odpowiednio, w tych przedziałach na $\varphi_2(t)$ wartości $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}, \dots$. Czynimy to dla wszystkich przedziałów pierwszego rzędu. Gdyśmy już określili $\varphi_{m-1}(t)$, i, tem samym, przedziały $(m-1)$ -go rzędu, to każdy z nich dzielimy na części (przedziały m -tego rzędu) proporcjonalnie do $p_1^{(m)}, p_2^{(m)}, \dots$ i kładziemy tam na $\varphi_m(t)$ odpowiednio wartości $x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots$. Funkcja φ_m jest więc określona wszędzie w przedziale $(0, 1)$ prócz co najwyżej przeliczalnej mnogości punktów (krańców przedziałów m -tego rzędu). Wartości, które nadamy funkcji $\varphi_m(t)$ w tych punktach wyjątkowych, są obojętne. Dla ustalenia uwagi przyjmujemy je równymi zeru.

¹ Praca niniejsza ułożona jest w ten sposób, że §§ 1, 2, 3, 4, tworzące pewną całość, są dostępne dla czytelnika obznajmionego z najprostszymi pojęciami Analizy. §§ 5, 6, 7 wymagają już elementów teorii całki Lebesgue'a, a § 6 (niezależny od innych), nawet t. zw. twierdzenia Riesz'a - Fischera, którego dowód znajdzie czytelnik np. w książce Saks'a, Zarys teorii całki, Warszawa, 1930, str. 335, w szczeg. str. 162.

² Dla większej przejrzystości rozważań czytelnik może założyć, że w każdym wierszu mamy tylko skończoną liczbę wyrazów.

P r z y k ł a d. Jeżeli każdy z wierszy tablic (P) i (X) zawiera tylko po dwa elementy

$$p_1^{(m)} = p_2^{(m)} = \frac{1}{2}, \quad x_1^{(m)} = 1, \quad x_2^{(m)} = -1 \quad (m=1, 2, \dots),$$

to funkcje φ_m noszą nazwę funkcji R a d e m a c h e r a, od nazwiska matematyka, który je pierwszy rozważał. Łatwo spostrzec, że tu

$$\varphi_n(t) = \text{sign} \sin(2^n \pi t), \quad \text{gdzie } \text{sign } x = 1 (x > 0), -1 (x < 0), 0 (x = 0).$$

Rozważmy funkcje $\bar{\varphi}_1(t) = \varphi_1(t)$, $\bar{\varphi}_2(t)$, ..., $\bar{\varphi}_m(t)$, ... gdzie $\bar{\varphi}_m(t)$ jest tak utworzone z m -tego wiersza tablic (P) i (X) , jak $\varphi_1(t)$ było utworzone z pierwszego. Funkcje $\bar{\varphi}_m(t)$ i $\varphi_m(t)$ można nazwać r ó w n o m i e r z a l n e m i, gdyż miara zbioru punktów (t. zn. łączna długość przedziałów), w których $\varphi_m(t)$, względnie $\bar{\varphi}_m(t)$, przyjmuje tę samą wartość $x_i^{(m)}$ jest jednakowa. Zatem

$$(1) \quad \int_0^1 \varphi_m(t) dt = \int_0^1 \bar{\varphi}_m(t) dt = \sum_{(i)} p_i^{(m)} x_i^{(m)}$$

$$(2) \quad \int_0^1 \varphi_m^2(t) dt = \int_0^1 \bar{\varphi}_m^2(t) dt = \sum_{(i)} p_i^{(m)} x_i^{(m)2}.$$

Zakładać będziemy, że szeregi (2) są zbieżne, a więc funkcje $\varphi_m^2(t)$ są całkowne³. Stąd już łatwo wyprowadzić, że szeregi (1) są zbieżne, nawet bezwzględnie. Istotnie, stosując nierówność S c h w a r z a, znajdziemy

$$\sum_{(i)} p_i^{(m)} |x_i^{(m)}| = \sum_{(i)} \sqrt{p_i^{(m)}} \cdot \sqrt{p_i^{(m)}} |x_i^{(m)}| \leq \left\{ \sum_{(i)} p_i^{(m)} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{(i)} p_i^{(m)} x_i^{(m)2} \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \sum_{(i)} p_i^{(m)} x_i^{(m)2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Wspólną wartość wyrażeń (1) będziemy oznaczali przez a_m („wartość średnia wielkości $x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots$ “)⁴. Przez b_m^2 („kwadratowe odchylenie wielkości $x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots$ od wartości średniej“) oznaczać będziemy wyrażenie

$$(3) \quad \int_0^1 (\varphi_m(t) - a_m)^2 dt = \int_0^1 (\bar{\varphi}_m(t) - a_m)^2 dt = \sum_{(i)} p_i^{(m)} (x_i^{(m)} - a_m)^2.$$

Rozważmy na odcinku $(0,1)$ dowolny układ funkcji $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m, \dots$. Mówimy, że jest on tam o r t o g o n a l n y, jeżeli

³ Będzie to, w szczególności, zawsze miało miejsce jeżeli w każdym wierszu tablicy (P) mamy tylko skończoną liczbę wyrazów.

⁴ T. zw. n a d z i e j a m a t e m a t y c z n a w terminach rachunku prawdopodobieństwa. Nie jest to zwykła średnia arytmetyczna (chyba, że $p_1^{(m)} = p_2^{(m)} = p_3^{(m)} = \dots$ ale średnia uogólniona, gdzie każdej wielkości $x_i^{(m)}$ przypisuje się pewną „wagę“ $p_i^{(m)}$.

$$(4) \quad \int_0^1 \varphi_m(t) \varphi_n(t) dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \neq 0 & (m = n) \end{cases}.$$

Jeżeli dla $m=n$ całka ta przyjmuje zawsze wartość 1, to o układzie mówimy, że jest również normalny. Wróćmy teraz do rozważanych uprzednio funkcji $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m, \dots$. Jeżeli jakieś $a_n=0$, to całka z φ_n , rozciągnięta na dowolny przedział $(n-1)$ -ego rzędu, jest równa zero. Ale na tym przedziale każda z funkcji $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ jest stała, a więc, dla $1 \leq m < n$ mamy pierwszą z relacji (4). Jeżeli wszystkie a_n znikają, to układ $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ jest ortogonalny. Jeżeli, w dodatku, $b_1=b_2=b_3=\dots=1$, to jest on również normalny. Tak np. ortogonalnym i normalnym jest układ Rademachera.

Tematem niniejszej pracy jest udowodnienie kilku twierdzeń podstawowych o zachowaniu się szeregów

$$(5) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(t)$$

oraz podanie pewnych ilustracji, czyniących te twierdzenia bardziej ciekawymi i zrozumiałymi. Wyniki otrzymane nic nie mówią o zachowaniu się szeregów (5) w jakimś indywidualnym punkcie. Stwierdzają one tylko zbieżność lub rozbieżność szeregu „prawie wszędzie”⁵, a więc noszą raczej, jeżeli można użyć tego wyrażenia, charakter statystyczny. Twierdzenia te można sformułować w terminach rachunku prawdopodobieństwa, i takie sformułowania są, może, z pewnego punktu widzenia, właściwsze i wygodniejsze w zastosowaniach. Tak np. zamiast mówić, że szereg (5)

⁵ Mówi się, że jakaś własność ma miejsce prawie wszędzie w przedziale np. $(0,1)$, albo, że ma miejsce dla prawie wszystkich punktów tego przedziału, jeżeli zbiór punktów przedziału które nie posiadają rozważanej własności jest miary zero. O jakimś zbiorze linjowym E mówi się, że jest on miary zero, jeżeli da się pokryć skończoną lub przeliczalną mnogością przedziałów $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ (mogących ewentualnie zachodzić na siebie) o łącznej długości dowolnie małej. Pojęcie miary zero jest czemś zupełnie elementarnym i dającym się wprowadzić niezależnie od bardziej skomplikowanego pojęcia miary wogóle. Ze względu na dalsze zastosowania udowodnimy następujące twierdzenie podstawowe: Jeżeli zbiory $E_1, E_2, \dots, E_m, \dots$ (w liczbie skończonej lub przeliczalnej) są miary zero, to również miary zero jest ich suma $E=E_1+E_2+\dots$. Istotnie, niech ε będzie dowolnie małą liczbą dodatnią i niech $I_1^{(m)}, I_2^{(m)}, \dots$ oznacza układ przedziałów pokrywających E_m i o łącznej długości $< \varepsilon/2^m$ ($m=1, 2, \dots$). Przedziały $I_1^{(1)}, I_2^{(1)}, \dots, I_1^{(2)}, I_2^{(2)}, \dots, I_1^{(m)}, I_2^{(m)}, \dots$ pokrywają łącznie cały zbiór E , a suma ich długości nie przekracza $\varepsilon/2 + \varepsilon/2^2 + \dots + \varepsilon/2^m + \dots = \varepsilon$. A więc E jest istotnie miary zero. Jest rzeczą oczywistą, że zbiór składający się z jednego punktu jest miary zero. To samo więc można powiedzieć o każdym zbiorze przeliczalnym.

jest zbieżny prawie wszędzie, można powiedzieć, że prawdopodobieństwo zbieżności szeregu

$$\sum_{m=1}^{\infty} y^{(m)}$$

którego wyrazami są „zmiennne ewentualne” $y^{(m)}$, przyjmujące wartości $x_1^{(m)}$, $x_2^{(m)}$, ... z prawdopodobieństwami odpowiednio $p_1^{(m)}$, $p_2^{(m)}$, ..., jest równe 1. Będziemy się jednak trzymali konsekwentnie, chociażby ze względu na metody dowodów, sformułowań funkcyjnych, odsyłając czytelnika, którego ten temat interesuje, do pracy prof. R a j c h m a n a ⁶, gdzie jest omówiona bardzo przystępnie interpretacja geometryczna elementarnych pojęć i twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa.

Artykuł poniższy, poza pewnemi uproszczeniami dowodów, nie zawiera wyników zasadniczo nowych. Zagadnienia omawiane są, jednak, niewątpliwie, ciekawe i ważne. Niech więc to będzie usprawiedliwieniem dla powstania niniejszej pracy.

Twierdzenie 1 należy do C h i Ń c z y n a i K o ł m o g o r o w a (Moskowskij Matematyczeskij Sbornik, t. 32 (1925), str. 668—677), twierdzenie 4 do K o ł m o g o r o w a (tamże; p. również Mathematische Annalen, t. 99 (1928), str. 309—319), twierdzenie 2 do K o ł m o g o r o w a („Comptes Rendus” Akademii Paryskiej, t. 191 (1930), str. 910). Na twierdzenie 1 podane są dwa dowody. Pierwszy (§ 2) jest powtórzeniem bez zmian istotnych dowodu K o ł m o g o r o w a z pracy (cyt. wyżej) z Math. Annalen. Drugi (§ 5) jest uproszczeniem dowodu ogłoszonego gdzieindziej (R: E: A: C. P a l e y i A. Z y g m u n d, On some series of functions. Proc. Cambridge Phil. Soc. t. 26 (1930), str. 337—357 i nieco bardziej skomplikowanego. Na uproszczenie to zwrócił uwagę autorowi p. P a l e y. Dowód ten, pomimo, że jest nieelementarny, może zasłużyć na pewną uwagę. Dowód tw. 2, tak jak go podaję poniżej, jest prostszy, niż dowód K o ł m o g o r o w a (uproszczenie to otrzymał, niezależnie, również prof. Z a l c w a s s e r). Twierdzenie 3 jest wzięte z cytowanej pracy w Cambridge Proceedings.

Wreszcie lemat β użyty przy dowodzie tw. 4 był już wyzyskany (patrz P a l e y i Z y g m u n d, Cambridge Proceedings, t. 28 (1932), str. 192) w podobnym celu.

Czytelnik, któregooby interesowały zagadnienia związane z układem R a d e m a c h e r a, znajdzie je omówione w artykule monograficznym K a c z m a r z a i S t e i n h a u s a („Le système orthogonal de M. Rademacher, Studia Math.; t. 2 (1930)).

§ 2

Twierdzenie 1. Jeżeli szeregi $b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_m^2 + \dots$ oraz $a_1 + a_2 + \dots + a_m + \dots$ są zbieżne ⁷, to szereg (5) jest zbieżny prawie wszędzie w przedziale (0, 1).

Dowód. Połóżmy $\psi_m(t) = \varphi_m(t) - a_m$. Zatem

⁶ „Prawo wielkich liczb”, Math. Polska, t. 6 (1931), str. 66—74, „Zaostrzone prawo wielkich liczb”, tamże str. 145—161. P. również tegoż autora „Zaostrzone prawo wielkich liczb i prawo iterowanego logarytmu”. Wiadomości Matem., t. 35.

⁷ Wielkości a_m i b_m^2 są określone odpowiednio przez wzory (1) i (3).

$$\int_0^1 \varphi_m(t) dt = 0 \quad (m=1, 2, \dots)$$

Rozumowanie któreśmy już stosowali wyżej, daje, że układ $\psi_1, \psi_2, \dots$ jest ortogonalny. Ze względu na założenia twierdzenia wystarczy więc udowodnić zbieżność szeregu $\sum \varphi_m(t)$. Albo jeszcze inaczej: wystarczy udowodnić zbieżność szeregu (5) przy założeniu, że wszystkie liczby $a_1, a_2, \dots$ są równe zero.

L e m a t. Niech A oznacza liczbę dodatnią, $B_N^2 = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_N^2$. Zbiór E tych punktów t , gdzie choć jedna z sum cząstkowych $s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t)$ szeregu (5) jest nie mniejsza co do wartości bezwzględnej od A , składa się z odcinków o łącznej długości nie przekraczającej B_N/A^2 .

Że E składa się z odcinków (albo jest pusty), jest widoczne. Oznaczmy przez E_k zbiór tych wartości t , dla których $|s_k(t)| \geq A$, ale wszystkie poprzednie sumy cząstkowe (t. zn. $s_1(t), s_2(t), \dots, s_{k-1}(t)$) są absolutnie mniejsze od A . Wówczas $E = E_1 + E_2 + \dots + E_N$. Zbiór E_k zależy tylko od funkcji $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$, a więc, jeżeli zawiera jakiś punkt, to zawiera i cały przedział k -tego rzędu na którym ten punkt leży. Stąd wynika, że jeżeli $I = (\alpha, \beta)$ jest dowolnym przedziałem k -tego rzędu ($k \leq N$), zawartym w E , to

$$\int_I s_N^2 dt = \int_I [s_k + (s_N - s_k)]^2 dt = \int_I s_k^2 dt + \int_I (s_N - s_k)^2 dt \geq \int_I s_k^2 dt^8$$

Teraz wystarczy zauważyć, że⁹

$$(6) \quad B_N^2 = \int_0^1 s_N^2 dt \geq \int_E s_N^2 dt = \sum_{k=1}^N \int_{E_k} s_N^2 dt \geq \sum_{k=1}^N \int_{E_k} s_k^2 dt \geq \sum_{k=1}^N A^2 \cdot \text{miara } E_k = A^2 \cdot \text{miara } E.$$

Lemat jest prawdziwy i dla $N = \infty$. Istotnie, w tym przypadku zbiór $E = \sum_1^\infty E_j$ jest znów sumą skończonego lub przeliczalnego układu przedzia-

⁸ Przez $\int_E f dt$ oznaczamy całkę funkcji f na zbiorze E (składającym się z pewnej liczby przedziałów).

⁹ Pierwszą z równości (6) dostajemy łatwo rozwijając s_N^2 i uwzględniając ortogonalność $\{\varphi_m\}$.

łów różnych rzędów $I_1, I_2, \dots, I_k, \dots$ nie zachodzących na siebie. Weźmy pierwszych k z tych przedziałów. Jeżeli tylko j jest dostatecznie duże, to są one wszystkie zawarte w $E_1 + E_2 + \dots + E_j$, a więc i ich łączna długość nie przekracza $B_j^2/A^2 \leq B^2/A^2$, gdzie $B = \lim B_N$. Ponieważ k może być dowolnie wielkie, więc łączna długość wszystkich przedziałów tworzących zbiór E nie przekracza B^2/A^2 .

Teraz już łatwo udowodnić twierdzenie. Niech H oznacza zbiór punktów rozbieżności szeregu (5), zaś H_k zbiór takich punktów t , że, dla nieskończonego wielu par wskaźników m i n mamy $|s_m(t) - s_n(t)| \geq 1/k$. Rzecz prosta, że $H = H_1 + H_2 + \dots + H_k + \dots$ i wystarczy wykazać, że każdy ze zbiorów H_k jest miary zero. W tym celu zauważmy, że, jakiegokolwiek weźmiemy N , to w każdym punkcie t zbioru H_k istnieje nieskończenie wiele wskaźników n takich, że $|s_n(t) - s_N(t)| \geq 1/2k$ (w przeciwnym przypadku dla wszystkich dostatecznie dużych m i n mielibyśmy $|s_m(t) - s_n(t)| < |s_m(t) - s_N(t)| + |s_N(t) - s_n(t)| < 1/2k + 1/2k = 1/k$, wbrew założeniu). Zatem, w myśl lematu, miara zbioru H_k nie przekracza $\frac{R_N}{(1/2k)^2}$, gdzie $R_N = B^2 - B_N^2$, a więc, skoro N może być dowolnie duże, H_k jest miary zero.

§ 3

Lemat. Jeżeli szereg liczbowy $c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots$ jest zbieżny do sumy skończonej, to

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_1 + 2c_2 + \dots + nc_n}{n} = 0.$$

Inaczej mówiąc, dla szeregu $\sum c_n$ zbieżnego, ciąg nc_n zdąży przeciętnie do zera¹⁰. Twierdzenie to zawdzięczamy K r o n e c k e r o w i. Oto krótki jego dowód. Połóżmy $s_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$. Z elementóW Analizy wiadomo, że od tej samej granicy co s_n zdąży ciąg

$$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n+1} = \frac{nc_1 + (n-1)c_2 + \dots + c_n}{n+1}$$

(właściwie w mianowniku powinno być n zamiast $n+1$, ale w granicy, gdy $n \rightarrow \infty$, wyjdzie to na jedno), a więc różnica $s_n - \sigma_n$ zdąży do zera. Różnica ta, jeżeli w jej mianowniku zastąpimy $n+1$ przez n , jest właśnie wyrażeniem stojącym pod znakiem $\lim$ w (7).

¹⁰ Już najprostsze przykłady wskazują, że sam ciąg nc_n może nie dążyć do zera (chyba że założymy, że szereg c_n jest o wyrazach dodatnich monotonicznie dążących do zera).

Twierdzenie 2. Jeżeli szereg $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m^2}{m^2}$ jest zbieżny oraz istnieje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a,$$

to dla wyrazów szeregu (5) mamy prawie wszędzie w przedziale $0 \leq t \leq 1$ związek

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \dots + \varphi_n(t)}{n} = a.$$

Twierdzenie to, interpretowane w terminach rachunku prawdopodobieństwa, jest wyjątkowej wagi i nosi nazwę „*prawa wielkich liczb*”¹¹.

Dowód. Połóżmy $\varphi_m^*(t) = (\varphi_m(t) - a_m)/m$. Mamy

$$a_m^* = \int_0^1 \varphi_m^*(t) dt = 0, \quad b_m^{*2} = \int_0^1 [\varphi_m^*(t) - 0]^2 dt = \frac{b_m^2}{m^2}.$$

Ponieważ szeregi $\sum a_m^*$ i $\sum b_m^{*2}$ są zbieżne, przeto, w myśl twierdzenia 1, zbieżnym jest prawie wszędzie szereg $\sum \varphi_m^*(t)$, co, w związku z lematem, dowodzi prawdziwości twierdzenia. Zauważymy jeszcze, że warunek zbieżności szeregu $\sum b_m^2/m^2$ będzie napewno spełniony jeżeli wszystkie funkcje φ_m są jednostajnie ograniczone co do wartości bezwzględnej. Istotnie, wówczas liczby a_m , a więc i b_m^2 są ograniczone i wystarczy uwzględnić zbieżność szeregu $\sum 1/m^2$.

§ 4

Zilustrujemy otrzymane twierdzenia na kilku przykładach. Założmy, że wiersze tablic (P) i (X) składają się z dwu elementów

$$p_1^{(m)} = p_2^{(m)} = \frac{1}{2}, \quad x_1^{(m)} = 0, \quad x_2^{(m)} = 1$$

Łatwo widzieć, że jeżeli pominiemy wartości t postaci $p/2^q$ (p i q całkowite dodatnie), to funkcja $\varphi_n(t)$ będzie przedstawiała n -tą cyfrę rozwinięcia dwójkowego liczby t . W rozważanym przypadku $a_m = 1/2$, $b_m = 1/2$ ($m=1, 2, \dots$), a więc założenia twierdzenia 2 są spełnione, przyczem $a=1/2$. Licznik ilorazu stojącego pod znakiem $\lim$ w wyrażeniu (8) przedstawia liczbę $v(n)$ jedynek, występujących między pierwszymi n cyframi rozwinięcia dwójkowego liczby t , a więc dla prawie każdej liczby t przedziału $(0, 1)$ iloraz $v(n)/n \rightarrow 1/2$; zgruba mówiąc, w rozwinięciu tem zera

¹¹ A właściwie „zaostrzonego prawa wielkich liczb”. Po szczegóły odsyłamy czytelnika do cytowanych już prac p. R a j c h m a n a.

i jedyńki występują prawie zawsze równie często. Pierwszy podał to twierdzenie Borel. Czytelnik nie znajdzie trudności w udowodnieniu, że twierdzenie analogiczne ma miejsce dla dowolnej zasady liczenia g : cyfry $0, 1, 2, \dots, g-1$ będą prawie wszędzie występowały jednakowo często.

Weźmy dowolny szereg $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$ o wyrazach dodatnich i rozważmy wszystkie szeregi

$$(9) \quad \pm c_1 \pm c_2 \pm \dots \pm c_m \pm \dots$$

które powstają z szeregu pierwotnego przez zmiany znaków. Można się zastanawiać nad „prawdopodobieństwem” otrzymania w ten sposób szeregu zbieżnego lub rozbieżnego (słowo „prawdopodobieństwo” bierzemy tu w sensie intuicyjnym, nie kojarząc z niem żadnych ścisłych określeń). Łatwo widzieć, że, jeżeli $r_1(t), r_2(t), \dots, r_m(t), \dots$ oznacza ciąg funkcji Rademachera, to wszystkie szeregi (9)¹² otrzymamy z szeregu $\sum_{m=1}^{\infty} c_m r_m(t)$, nadając na t różne wartości przedziału $(0, 1)$. Będziemy mówić, że prawie wszystkie szeregi (9) są zbieżne (wzgl. rozbieżne), jeżeli dla prawie wszystkich wartości t szereg $\sum c_m r_m(t)$ jest zbieżny (wzgl. rozbieżny). Otóż z twierdzenia 1 wynika, że prawie wszystkie szeregi (9) będą zbieżne, jeżeli suma $c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_m^2 + \dots$ jest skończona. W szczególności prawie wszystkie szeregi, które otrzymamy przez zmianę znaków z szeregu harmonicznego $1 + 1/2 + 1/3 + \dots$, będą zbieżne. Twierdzenie 4 da nam, że jeżeli $c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_m^2 + \dots = \infty$ (np. gdy $c_m = 1/\sqrt{m}$), to prawie wszystkie szeregi (9) będą rozbieżne.

§ 5

Podamy jeszcze jedno zastosowanie jakie może mieć twierdzenie 1 (oraz tw. 4, p. niżej), tym razem w dziedzinie szeregów funkcji. Ograniczymy się przytem do przypadku prostego, i, może, najbardziej ciekawego, szeregów potęgowych. Twierdzenia 1 i 4 mówią, że jeżeli $\{\varphi_n(t)\}$ jest układem Rademachera, to szereg $\sum c_m \varphi_m(t)$ jest prawie wszędzie zbieżny, albo prawie wszędzie rozbieżny, w zależności od tego, czy $\sum |c_m|^2 < \infty$, czy też $\sum |c_m|^2 = \infty$. Dotychczas zakładaliśmy, że c_m są rzeczywiste, ale twierdzenia zachowują się i w przypadku ogólnym $c_m = c'_m + i c''_m$, jak to widać odrazu, pisząc $\sum c_m \varphi_m = \sum c'_m \varphi_m + i \sum c''_m \varphi_m$ [Tak np. jeżeli

¹² z wyjątkiem tych, gdzie, poczynając od pewnego miejsca, mamy same plusy lub same minusy. Szeregi te, tworzące zbiór przeliczalny, są nieciekawe i pomijamy je, podobnie jak pomijamy na t wartości $p/2^q$.

$\sum |c_m|^2 = \infty$, to bądź $\sum c_m'^2 = \infty$, bądź $\sum c_m''^2 = \infty$. Zatem przynajmniej jeden z szeregów $\sum c_m' \varphi_m, \sum c_m'' \varphi_m$ jest rozbieżny prawie wszędzie, a więc to samo da się powiedzieć o $\sum c_m \varphi_m$. Rozważmy dowolny szereg potęgowy $\alpha_1 + \alpha_2 z + \alpha_3 z^2 + \dots$ o promieniu zbieżności 1 i zastanówmy się, co można powiedzieć o zachowaniu się na kole zbieżności szeregów

$$(10) \quad \pm \alpha_1 \pm \alpha_2 z \pm \alpha_3 z^2 \pm \dots$$

które otrzymujemy z podstawowego przez zmiany znaków.

Twierdzenie 3. Jeżeli $\sum |\alpha_k|^2 < \infty$, to prawie wszystkie szeregi (10) są prawie wszędzie zbieżne na kole $|z|=1$. Jeżeli $\sum |\alpha_k|^2 = \infty$, to prawie wszystkie szeregi (10) są prawie wszędzie rozbieżne na kole $|z|=1$.

Istotnie, założmy, że $\sum |\alpha_k|^2 < \infty$ i oznaczmy przez E zbiór punktów o współrzędnych kartezjańskich t, θ , położonych w prostokącie $0 \leq t \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ i takich, że szereg

$$\alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 e^{i\theta} \varphi_2(t) + \dots + \alpha_m e^{i(m-1)\theta} \varphi_m(t) + \dots$$

jest zbieżny. Zbiór E jest mierzalny i, w myśl cytowanego wyżej twierdzenia o szeregach Rademachera, przecięcie go z każdą prostą $\theta = \text{const.}$ jest miary 1. Zatem miara płaska E wynosi 2π , a więc przecięcie się E z prawie każdą prostą $t = \text{const.}$ ma miarę 2π . Jest to właśnie pierwsza część twierdzenia. Druga dowodzi się w sposób identyczny, przy uwzględnieniu twierdzenia 4.

§ 6

W niniejszym §-cie podamy jeszcze jeden dowód twierdzenia 1. Jak już było wspomniane, możemy się ograniczyć do przypadku $a_1 = a_2 = \dots = 0$. Zatem funkcje $\omega_m(t) = \varphi_m(t)/b_m$ tworzą układ ortogonalny i normalny. Obecnie $\sum \varphi_m(t) = \sum b_m \omega_m(t)$, i, w myśl twierdzenia Riesz a - Fischera, ze zbieżności szeregu $\sum b_m^2$ wynika istnienie funkcji $f(x)$, całkownej wraz z kwadratem, takiej, że

$$\int_0^1 [f(t) - s_N(t)]^2 dt \rightarrow 0, \quad \text{gdy } N \rightarrow \infty,$$

gdzie $s_N(t)$ oznacza N -tą sumę cząstkową szeregu $\sum b_m \omega_m(t)$. Stosując nierówność Schwarz'a, widzimy, że na każdym przedziale (a, b) dąży do zera wyrażenie

$$\left| \int_a^b (f - s_N) dt \right| \leq \int_a^b |f - s_N| dt \leq \int_0^1 |f - s_N| dt \leq \left[\int_0^1 (f - s_N)^2 dt \right]^{1/2}$$

Zatem całka funkcji f na jakimś przedziale I jest równa granicy (dla $N \rightarrow \infty$) całki funkcji $s_N(t)$. Jeżeli I jest przedziałem k -tego rzędu, to dla $N > k$

$$\int_I (s_N - s_k) dt = 0, \text{ a więc } \int_I f dt = \int_I s_k dt.$$

Niech t_0 będzie dowolnym punktem gdzie całka $F(t)$ funkcji $f(t)$ posiada pochodną, przyczem $t_0 \neq p/2$. Niech (α_k, β_k) będzie przedziałem k -tego rzędu zawierającym t_0 . Wówczas, ze względu na stałość $s_k(t)$ wewnątrz (α_k, β_k) , mamy, dla $k \rightarrow \infty$,

$$(10a) \quad s_k(t_0) = \frac{1}{\beta_k - \alpha_k} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} s_k(t) dt = \frac{1}{\beta_k - \alpha_k} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(t) dt \rightarrow F'(t_0)^{13} \quad \text{c. b. d. o.}$$

§ 7.

Że twierdzenie 1 całkowicie odwrócić się nie da, widać już z najprostszych przykładów. Tak np. jeżeli położymy $p_1^{(m)} = p_2^{(m)} = 1/2m^2$, $p_3^{(m)} = 1 - 1/m^2$, $x_1^{(m)} = -x_2^{(m)}$, $x_3^{(m)} = 0$, to, jakiegokolwiek bralibyśmy wartości na $x_1^{(m)}$ ($m=1, 2, \dots$), szereg $\sum \varphi_m(t)$ będzie zbieżny prawie wszędzie, gdyż prawie wszędzie tylko skończona liczba wyrazów szeregu będzie różna od zera.

Twierdzenie 4. Jeżeli wyrazy tablicy (X) są jednostajnie ograniczone, i szereg (5) jest zbieżny prawie wszędzie, to zbieżne są szeregi $\sum a_m$ i $\sum b_m^2$.

Dowód oprzemy na trzech lematach. Podobnie jak w § 2, położymy $\varphi_n(t) - a_n = \psi_n(t)$.

Lemat α . Układ funkcji $\psi_{m,n}(t) = \psi_m(t)\psi_n(t)$ ($m, n=1, 2, \dots, m < n$) jest ortogonalny na $(0, 1)$.

Istotnie, rozważmy całkę z iloczynu $\psi_{m,n}(t)\psi_{m',n'}(t)$, rozciągniętą na przedział $(0, 1)$. Są możliwe dwa przypadki. 1° Pomiędzy liczbami m, n, m', n' mamy tylko jedną największą. Niech to będzie np. n . Na dowolnym przedziale I rzędu $n-1$ funkcja $\psi_m\psi_{m'}\psi_n$ jest stała, a więc całka z $\psi_m\psi_{m'}\psi_n\psi_{m'}\psi_n$ rozciągnięta na I , a tem samem i na $(0, 1)$, jest zerem. 2° Pomiędzy liczbami m, n, m', n' istnieją dwie największe: $n=n'$. Na każdym przedziale I rzędu $n-1$ całka z $\psi_m\psi_{m'}\psi_n^2$ jest więc równa iloczynowi $b_n^2 |I|$ (przez $|H|$ oznaczamy miarę dowolnego zbioru H), pomnożonemu przez odpowiednią

wartość $\psi_m\psi_{m'}$. Zatem całka na przedziale $(0, 1)$ będzie $b_n^2 \int_0^1 \psi_m\psi_{m'} dt$, a więc,

skoro $m \neq m'$, jest równa zeru.

¹³ Zakładamy tu milcząco, że $\beta_k - \alpha_k \rightarrow 0$. Jeżeli jednak $\lim(\beta_k - \alpha_k) \neq 0$ to, jak łatwo widzieć, ostatni z ilorazów w (10a) również dąży do granicy.

U w a g a d o d a t k o w a. Zakładając w ostatniej całce $m=m'$, dosta-

$$\text{jemy: } \int_0^1 \psi_m^2 \psi_n^2 dt = b_m^2 b_n^2.$$

Lemat β . Niech $f(t) \geq 0$ będzie funkcją określoną na $(0, 1)$, zaś λ i A stałymi dodatnimi. Jeżeli jednocześnie

$$(11) \quad \int_0^1 f dt \geq A, \quad \int_0^1 f^2 dt \leq \lambda^2 A^2,$$

to $f(t) \geq A/2$ w zbiorze miary nie mniejszej od $1/16\lambda^2$.

Istotnie, oznaczmy przez E_1, E_2, E_3 zbiory tych punktów, gdzie, odpowiednio, $f(t) \leq A/2$, $A/2 < f(t) \leq 4\lambda^2 A$, $f(t) > 4\lambda^2 A$. A więc

$$(12) \quad \int_{E_1} f dt \leq |E_1| A/2 \leq A/2, \quad |E_3| \cdot 16\lambda^4 A^2 \leq \int_{E_3} f^2 dt \leq \lambda^2 A^2.$$

Z ostatniej nierówności wnioskujemy, że $|E_3| \leq 1/16\lambda^2$. Stosując więc nierówność S c h w a r z a:

$$\int_{E_3} f dt \leq \left(\int_{E_3} f^2 dt \right)^{1/2} |E_3|^{1/2} \leq \lambda A/4 = A/4.$$

Z ostatniej nierówności oraz z pierwszych nierówności (11) i (12) wynika, że całka f , rozciągnięta na E_2 , przekracza $A/4$, skąd tem bardziej (skoro $f \leq 4\lambda^2 A$ na E_2) $4\lambda^2 A |E_2| \geq A/4$ t. zn. $|E_2| \geq 1/16\lambda^2$ c. b. d. o.

Przypuśćmy, dla prostoty, że wszystkie funkcje ψ_m nie przekraczają absolutnie 1¹⁴.

Lemat γ . Oznaczając przez s_N sumę cząstkową szeregu (5) i kładąc $A_N = a_1 + a_2 + \dots + a_N$, $B_N^2 = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_N^2$, mamy, jeżeli tylko $B_N \geq 1$,

$$(13) \quad \int_0^1 s_N^2 dt = B_N^2 + A_N^2, \quad \int_0^1 s_N^4 dt \leq 64 (B_N^2 + A_N^2)^2.$$

Pierwsza równość jest oczywista, jeżeli wyzyskamy fakt że $\varphi_m = \psi_m + a_m$ i ortogonalność $\{\psi_m\}$. Dla dowodu drugiej nierówności połóżmy $\bar{s}_N = \psi_1 + \dots + \psi_N$ i zauważmy, że współczynniki we wzorze New t o n a na 4-ą potęgę sumy nie przekraczają 6, a więc, uwzględniając lemat α , dostaniemy łatwo

¹⁴ Dzieliąc w razie potrzeby, wszystkie wyrazy tablicy (X) przez jedną i tą samą stałą, możemy je uczynić absolutnie mniejszemi od 1/2. wówczas i $|a_m| \leq 1/2$, a więc $|\psi_m| = |\varphi_m - a_m| \leq 1$.

$$(14) \quad \int_0^1 \bar{s}_N^4 dt \leq 6 \sum_{n=2}^N \sum_{m=1}^{n-1} b_m^2 b_n^2 + \sum_{n=1}^N \int_0^1 \psi_n^4 dt.$$

Ponieważ $\psi_n^4 = \psi_n^2 \psi_n^2 \leq \psi_n^2$, a więc prawa strona wzoru (14) nie przekracza $3B_N^4 + B_N^2 \leq 4B_N^4$. Korzystając z oczywistej nierówności $(\alpha + \beta)^4 \leq (2\alpha)^4 + (2\beta)^4$, mamy $s_N^4 \leq 16(\bar{s}_N^4 + A_N^4)$, a więc lewa strona drugiej nierówności (13) nie przekracza $16(4B_N^4 + A_N^4) \leq 64(B_N^2 + A_N^2)^2$.

Przechodząc do dowodu twierdzenia, wykażemy przedewszystkiem zbieżność szeregu $b_1^2 + b_2^2 + \dots$. Istotnie, w przeciwnym przypadku $B_N \rightarrow \infty$, a więc, biorąc N dostatecznie duże, mamy relacje (13), skąd. w myśl lematu β , mamy, że $s_N \geq (B_N^2 + A_N^2)/2 \geq B_N^2/2$ w zbiorze miary conajmniej $16^{-1} \cdot 8^{-2} = 1/1024$. Gdyby jednak szereg (5) był zbieżny prawie wszędzie, to, w myśl znanego twierdzenia J e g o r o w a, s_n byłoby ograniczone jednostajnie w zbiorze miary dowolnie bliskiej 1. Sprzeczność ta dowodzi zbieżnego szeregu $b_1^2 + b_2^2 + \dots$. Stąd, jednak, w myśl twierdzenia 1, wynika zbieżność prawie wszędzie szeregu $\sum \psi_m(t)$. Biorąc dowolny punkt $t = t_0$ zbieżności jednocześnie szeregu ostatniego i szeregu (5), dostajemy zbieżność szeregu $\sum (\psi_m(t_0) - \psi_m(t_0)) = \sum a_m$ c. b. d. o.

U w a g a. Twierdzenie 4 da się jeszcze uogólnić. Tak np. w wysłowniu twierdzenia można założyć tylko, że rozważany szereg jest zbieżny w zbiorze miary dodatniej. Zamiast zakładać ograniczoność wyrazów tablicy (X), wystarczy założyć, że iloraz

$$\sum_{n=1}^N \int_0^1 \psi_n^4 dt / B_n^4$$

jest ograniczony, gdy $N \rightarrow \infty$ (a nawet 4-ą potęgę można zastąpić przez 3-ią). Wreszcie lemat β (który ma pozatem ciekawe zastosowania) da się zaostrzyć przez zastąpienie w drugiej nierówności (11) wykładnika 2 przez $1 + \varepsilon$. W dalsze rozważania wchodzić tu jednak nie będziemy.

Teoria funkcji

E. C. TITCHMARSH, M. A., F. R. S. *The Theory of Functions*. Str. X, 454, Oxford, Clarendon Press, 1932. Cena 25 szylingów.

Książka prof. Titchmarsha składa się z 2 części, z których pierwsza jest poświęcona teorii funkcji analitycznych, a druga — funkcjom zmiennej rzeczywistej (dokładniej: całce Lebesgue'a i szeregom trygonometrycznym). Zestawienie w jednej książce metod funkcji zmiennej zespolonej oraz zmiennej rzeczywistej wydaje mi się — jakkolwiek dotychczas mało praktykowane — rzeczą słuszną. W ostatnich czasach do teorii funkcji analitycznych coraz bardziej przenikają metody rzeczywiste i wiele zagadnień tej teorii (np. zagadnienie wartości brzegowych) może być sformułowanych dopiero w terminach zmiennej rzeczywistej. Zrozumienie pewnych działów analizy zespolonej bez teorii miary i całki Lebesgue'a jest obecnie niemożliwe. Oddziaływanie odwrotne — jakkolwiek w słabszym stopniu — też ma miejsce: pewne własności strukturalne funkcji rzeczywistych zostały odkryte przy pomocy funkcji analitycznych. Dość wspomnieć klasyczny obecnie wynik, że dla dowolnej funkcji ciągłej $f(x)$ ¹⁾ (założmy dla prostoty sformułowanie, że $f(x)$ jest określone dla każdego rzeczywistego x i że ma okres 2π) całka (niewłaściwa)

$$\int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} dt$$

istnieje dla prawie wszystkich x ²⁾. Wynik ten — jak i niektóre inne, podobne — otrzymano przez zbadanie zachowania się pewnych funkcji analitycznych, związanych z $f(x)$. Rolę łącznika między teoriami zmiennej rzeczywistej i zmiennej zespolonej odgrywa dział przechodni — teoria szeregów trygonometrycznych, którą można by nazwać teorią analityczną funkcji zmiennej rzeczywistej.

Oto, w krótkich słowach, treść książki. Autor zakłada u czytelnika znajomość Analizy w zakresie znanej książki Hardy'ego³⁾. Rozdział I, wstępny, poświęcony szeregom i iloczynom nieskończonym, oraz całkom, ma na celu uzupełnienie wiedzy czytelnika dalszemi wiadomościami o całkowaniu szeregów, szeregach i całkach wielokrotnych, funkcji i t. p. Rozdział II omawia pojęcia i twierdzenia podstawowe w teorii funkcji zmiennej zespolonej, a więc, m. in., różniczkowalność, twierdzenie i wzór Cauchy'ego, osobliwości funkcji, twierdzenie Liouville'a. Rozdział III podaje dalsze konsekwencje twierdzenia Cauchy'ego, a więc np. twierdzenie o residuach, twierdzenia Rouche'go i Hurwitza (to drugie omawia związki między zerami wyrazów ciągu i zerami funkcji granicznej), wzory Poissona-Jensena i Carleman'a. Następny rozdział jest poświęcony pojęciu przedłużenia analitycznego. Dodatkowy materiał (dobrany, należy to zaznaczyć, bardzo trafnie) ma na celu wyjaśnienie i zilustrowanie tego pojęcia. Omówione są, m. in., równania funkcyjne funkcji $f'(s)$ i $f''(s)$, twierdzenie Hadamarda o mnożeniu osobliwości oraz zasada odbicia Schwarz'a. Rozdział V, poza kilkoma pierwszymi stronami, poświęconymi klasycznej zasadzie ma-

¹⁾ Wystarczy założyć całkowalność w sensie Lebesgue'a.

²⁾ T. zn., że zbiór tych x , dla których rozważana całka nie istnieje, da się pokryć skończoną lub przeliczalną mnogością przedziałów o łącznej długości dowolnie małej.

³⁾ Zwracamy uwagę, że istnieje tłumaczenie książki Hardy'ego („Wstęp do Analizy”) na język polski, wyd. „Mathesis Polskiej”.

ximum i jej zastosowaniom, zawiera wyniki nowsze: mamy więc twierdzenia *Vitali*'ego i *Montela* o ciągach funkcji, twierdzenia *Hadamarda* i *Hardy*'ego („Dreikreisensätze”) i, wreszcie, zasadę *Phragmena-Lindelöfa*, z zastosowaniem do funkcji regularnych w kącie. Rozdział VI omawia pojęcia odwzorowania odpowiedniego. Podane są, m. in., własności geometryczne przekształcenia homograficznego. szereg przykładów funkcji jedno-jednowartościowych („schlicht”), np. funkcji odwzorowującej półpłaszczyznę na wnętrze dowolnego trójkąta. Udowodnione jest twierdzenie podstawowe o możliwości odwzorowania odpowiedniego wnętrza obszaru jednospójnego na wnętrze koła oraz „Verzerrungssatz” *Koebe*'go.

Na treść następnych trzech rozdziałów, poświęconych odpowiednio funkcjom regularnym wewnątrz koła jednostkowego, funkcjom całkowitym i szeregom *Dirichleta*, składają się w dużym stopniu wyniki nowsze. Mamy więc tam twierdzenie *Taubera* wraz z uogólnieniem *Littlewooda* (udowodnionem ładną metodą *Karamaty*), twierdzenie *Fatou* („szereg potęgowy o współczynnikach dążących do zera jest zbieżny w każdym punkcie regularnym koła jednostkowego”) ⁴⁾, twierdzenie *Hadamarda* i *Ostrowskiego* o szeregach potęgowych posiadających luki. Następnie: rozwinięcie *Weierstrassa* funkcji na iloczyny nieskończone wraz z dalszemi twierdzeniami o rzędzie i zerach funkcji całkowitych, twierdzenie *Picarda*, udowodnione metodą elementarną, oraz szereg twierdzeń *Laguerre'a* o pierwiastkach wielomianów i funkcji całkowitych. Wreszcie rozdział o szeregach *Dirichleta*, prócz wyników obecnie klasycznych, zawiera szereg twierdzeń nowszych, że wymienię tu oszacowanie na liczbę zer oraz twierdzenie o istnieniu wartości średniej.

W ostatnich rozdziałach, poświęconych zmiennej rzeczywistej, mamy szczegółowo rozwiniętą teorię miary całki *Lebesgue'a*. Zaznaczę, mimochodem, że twierdzenie *Lebesgue'a* o różniczkowalności prawie wszędzie funkcji monotonicznej jest udowodnione metodą, podaną przez *Rajchmana* i *Saksa* (*Fundamenta Math.* t. 4). Z teorii szeregów trygonometrycznych książka zawiera podstawowe kryteria o zbieżności szeregów *Fouriera*, twierdzenia *Fejéra* i *Lebesgue'a* o sumowalności pierwszej średniej arytmetycznej, twierdzenie *Fischera-Riesz'a*, najbardziej podstawowe wyniki z teorii jednoznaczności przedstawiania funkcji przez szereg trygonometryczny i wreszcie elementy całki *Fouriera*.

Z podanej wyżej treści widzimy, że książka zawiera wiele materiału. Zawierają go również liczne zadania, zaopatrzone naogół we wskazówki, czy też szkic rozwiązania. Wiele z nich będzie ciekawych nawet dla specjalisty. Książka napisana jest jasno; w licznych przypadkach autor poprzedza dowód uwagami, wyjaśniającymi jego ideę przewodnią. Znazca przedmiotu natychmiast zauważy, że cały szereg tematów jest ujęty oryginalnie. Książkę uważam za jedną z najlepszych w tej dziedzinie i jak najbardziej godną polecenia.

A. Zygmund.

⁴⁾ Zgadza się z autorem, że podany przezeń dowód *Younga* twierdzenia *Fatou* jest trudniejszy, niż dowód *M. Riesz'a* (który znaleźć można np. w znanej książeczce *Landau'a* „Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie”, Lipsk, 1929), nie podzielałbym poglądu, że dowód *Younga* daje coś więcej, niż dowód *Riesz'a*.

Podstawy nowej teorii liczb

BACHMANN PAUL. *Grundlehren der neueren Zahlentheorie*. 3 Auflage. Str. XVI, 252, Berlin 1931. Walter de Gruyter u. C-o. RM. 9.60, w opr. RM. 10.50.

Trzecie wydanie znanego podręcznika Bachmanna jest niezmiennym przedrukiem drugiego. Wydawca R. Hausner zaopatrzył książkę zwięzłym życiorysem autora (obszerną biografię Bachmanna pióra K. Hensla znaleźć można w Jahresbericht der D. M. V. tom 36) oraz szczegółowym skrowidzem, sporządzonym przez jednego z jego uczniów.

Dzieło Bachmanna składa się z dwu części, z których pierwsza rozpatruje arytmetykę naturalnych ciał liczbowych, druga zaś ciała kwadratowe. Pierwsze trzy rozdziały pierwszej części obejmują prawa podzielności, kongruencje i reszty kwadratowe, rozdział czwarty obejmuje wyrażenia linjowe i ułamki łańcuchowe jako wstęp do rozdziału piątego, poświęconego formom kwadratowym, szczególnie zaś teorii redukcji. Pierwszy rozdział drugiej części omawia pojęcia podstawowe, które się spotykają przy ciałach kwadratowych, rozdział drugi zawiera teorię jedności, trzeci rozdział teorię podzielności mniej więcej do zasadniczego twierdzenia o jednoznacznej rozkładalności ideału w ideały pierwotne. W ostatnim, czwartym, rozdziale autor omawia związek pomiędzy klasą ideałów i klasą form; znajdujemy tam piękny zarys teorii kompozycji form kwadratowych.

Wykład Bachmanna jest pod bardzo silnym wpływem idei geometrycznych Kleina i Poincaré'go. Wiele rzeczy staje się z tego powodu o wiele bardziej intuicyjnymi i żywszemi, aniżeli w sformułowaniu czysto arytmetycznym, np. teoria redukcji form kwadratowych, przedewszystkiem jednak sama budowa teorii ideałów. Tak np. zostają liczby idealne przy końcu książki wprowadzone nie przez konstrukcje nadciała, lecz na drodze geometrycznej przez rozważenie odpowiednich siatek liczbowych.

Dowody są wszędzie przeprowadzone z wielką pieczołowitością. Liczne przykłady liczbowe są pomocne przy wyjaśnieniu pojęć podstawowych. Wymagania, stawiane czytelnikowi, można uważać za skromne, tempo wykładu jest dalekie od zbytniego pośpiechu. Książka powstała w czasie, gdy jeszcze nie połykano w matematyce kilometrów, raczej posuwano się spokojnie, chętnie zatrzymując się dłużej w piękniejszych okolicach.

W sumie książka ta jest bardzo użytecznym wstępem do studjum dzieł obszerniejszych (Dirichlet-Dedekind, Weber, Hilbert) oraz literatury oryginalnej.

Strona zewnętrzna jest, jak we wszystkich wydawnictwach Gruytera, wzorowa. Skromna jak na obecne stosunki cena umożliwi rozpowszechnienie książki, zwłaszcza wśród uczących się.

A. Walisz.

Kwanty i materja

INFELD LEOPOLD dr., doc. Uniw. J. K. *Nowe Drogi Nauki*. Kwanty i materja. Str. X, 284 z 27 fig. w tekście i na 3 tabl. Nakładem „Mathesis Polskiej”. Warszawa. 1933. (Z dziedziny Nauki i Techniki Tom 2). W opr. pl. zł 11.60.

W ciągu ostatnich paru lat dała się zauważyć w Polsce fala wzmożonego zainteresowania popularną literaturą naukową. Bardzo dużem, jak na nasze stosunki wydawnicze powodzeniem cieszyły się zwłaszcza przekłady książek popularnych znanego angielskiego astrofizyka, J. E. S. S., jednego z najlepszych popularyzatorów w literaturze światowej. Ostatnio zainteresowania publiczności, zajmującej się postęпами nauk przyrodniczych,

zaczynają się przesuwac od zagadnień astrofizycznych do nowych wyników fizyki, zwłaszcza fizyki atomu i do nowego światopoglądu, zdobytego przez nią w ciągu kilku lat ubiegłych. Żywym dowodem tych zainteresowań, wzmożonych, być może, już pod wpływem przekładów J e a n s a, było duże powodzenie popularnych odczytów z różnych dziedzin nowej fizyki, zorganizowanych w r. b. w Warszawie i we Lwowie.

W polskiej literaturze brak było dotychczas książek popularnych, w rodzaju popularyzacyjnych J e a n s a, książek, dostępnych całemu inteligentnemu ogółowi, któreby w sposób dla wszystkich zrozumiały, bez użycia wzorów, przedstawiały wyniki, osiągnięte przez nową fizykę oraz znaczenie filozoficzne tych wyników. Lukę tę wypełnia we wzorowy sposób książka p. L. I n f e l d a, *Nowe Drogi Nauki*.

Autor przedstawia w niej w powszechnie zrozumiały sposób dzisiejsze poglądy fizyki na budowę materji, na promieniowanie i na ich wzajemne oddziaływania. Nie chodzi mu jednak o samo podanie faktów i poglądów, lecz o jednoczesne zaznajomienie czytelnika na przykładzie rozwoju naszych poglądów na budowę materji z metodami pracy nauk przyrodniczych, z rolą teorii w fizyce. Czytelnik widzi, jak teoria buduje obraz świata fizycznego, jak, z poznaniem nowych faktów, obraz ten ulega przebudowie, komplikuje się coraz bardziej i jak wreszcie, dzięki wprowadzeniu nowych idei, spójrzeniu na zjawiska z innej strony powstaje nowa teoria. Widzi jednak, jak te przemiany teoryj prowadzą do coraz szerszego i pełniejszego obrazu rzeczywistości, jak każda nowa teoria stanowi postęp w stosunku do dawniejszej, pozwalającej ująć w ramy pewnego poglądu na rzeczywistość cały szereg nowych faktów. Poprzez ciągłe przemiany poglądów zarysowuje się ciągły postęp w poznawaniu przez nas praw, rządzących otaczającym nas światem.

Książkę p. I n f e l d a należy, zarówno co do treści, jak i co do formy, postawić na równi z najlepszymi wzorami zagranicznymi. Wyróżnia się ona zarówno oryginalnym swym układem, jak i świetnym stylem literackim, dzięki któremu czyta się ją z nieślabnącym zainteresowaniem. Również i pod względem informacyjnym książka jest całkowicie up to date; dokładnie omówione w niej zostały podstawowe odkrycia, dokonane w laboratorium R u t h e r f o r d a w ciągu roku ubiegłego: rozbitcie jądra litu przy pomocy protonów oraz stwierdzenie istnienia neutronów. W przypisku wspomniano nawet o dokonaniu w ciągu pierwszych miesięcy roku bieżącego odkrycia dodatniego elektronu.

Na specjalne podkreślenie zasługuje zwłaszcza staranny i metodyczny dobór b. oryginalnie pomyślanych przykładów i analogij. ułatwiających czytelnikowi uchwycenie nowych idei i poglądów.

Położenie przez autora nacisku na metody pracy naukowej teoretyków fizyki, oświecenie roli, rozwoju i przeobrażeń teoryj i hipotez, wprowadzenie czytelnika w krąg pojęć fizyki teoretycznej, stanowi jedną z największych zalet pięknej książki p. I n f e l d a.

Autorowi należy się duża wdzięczność za wzbogacenie polskiej literatury popularno-naukowej książką, którą śmiało uważać możemy za wzorową popularyzację.

Forma zewnętrzna książki, stanowiącej 2-gi tom wydawanej przez „Mathesis Polską” Biblioteki Poularno-Naukowej (Z Dziedziny Przyrody i Techniki) jest również bez zarzutu. Papier jest bardzo dobry, druk bardzo czytelny, format dogodny i korekta starannie zrobiona. Książkę należy jak najgoręcej polecić wszystkim, którzy interesują się rozwojem nauk przyrodniczych i jego filozoficznymi konsekwencjami.

S. Szczeniowski.

BIBLIOGRAFJA

Acta Physica Polonica*. Tom I (1932). W. H. Keesom. O stanach skupienia helu. J. Kawa. Ciepło katodowe łuku rtęciowego. F. J. Wiśniewski. Wyrażenie liczby i masy fotonów pola elektromagnetycznego w próżni. S. Szczeniowski i L. Infeld. O wpływie chmury elektronowej na strukturę fali de Broglie'a. J. Mazur. O zależności stałej dielektrycznej dwusiarczku węgla od temperatury. J. Mazur. Zależność gęstości dwusiarczku węgla i nitrobenzolu od temperatury. M. Wolfke i J. Mazur. O dwóch różnych modyfikacjach ciekłego dwusiarczku węgla. M. Wolfke i J. Mazur. O dwóch różnych modyfikacjach ciekłego nitrobenzolu. H. Jędrzejewski (†). Zjawiska dyfrakcyjne w emulacjach fotograficznych. S. Pieńkowski. O polaryzacji prążków Ramana. I. — CS_2 . J. Parysówna. O serjach rezonansowych pary bizmutu. B. Schmidtówna. O budowie krystalicznej drzewa. W. Kapuściński. O czasie zaniku fluorescencji pary kadmu. S. Rafałowski. O subtelnej budowie prążków widmowych rozproszonych w cieczach. S. Mrozowski. O nadsubtelnej budowie pasm wodorku rtęci. A. Piekara. O stałej dielektrycznej układów rozdrobnionych. A. Piekara. Stała dielektryczna emulsyj wodnych i alkoholowych. W. S. Urbański. O stosowności wzoru Clausiusa-Mosottiego do zawiesin. C. Pawłowski. Badania nad własnościami promieniowań. H. J. Blaton. O dyspersji światła w otoczeniu linii kwadrupolowych. S. de Walden. O triboluminescencji w parze rtęci. H. Herszfeld. O emisji elektronowej metali pod wpływem twardych promieni γ . I. Niewiedzia. O wydajności odskoku β . M. Żyw. Ładunek atomów odskoku radu. D. M. Wolfke i S. Ziemecki. O własnościach optycznych nitrobenzolu w okolicy jego punktu przemiany. A. Melamid. Uwagi o hipotezie quasi-ergodycznej. A. Piekara. Uwagi do pracy W. S. Urbańskiego: „O stosowności wzoru Clausiusa-Mosottiego do zawiesin”. S. Dobieński. Wpływ domieszek na temperaturę równowagi ciekłych odmian allotropowych. S. Kalandyk. Jonizacja przy eksplozjach stałych materiałów wybuchowych. S. Pieńkowski. O rozproszeniu ramanowskim światła spolaryzowanego linjowo. A. Sołtan. Próba wykrycia wpływu wiązań chemicznych na współczynnik pochłaniania promieni X. L. Sosnowski. O polaryzacji fluorescencji pary kadmu. J. Genard. O wygaszaniu fluorescencji pary jodu przez pole magnetyczne. B. Hurwicz. Z badań nad widmami pochłaniania i fluorescencji pochodnych naftalenu. F. Śpiwankiewicz. O fluorescencji mieszaniny par kadmu i cynku. T. Tucholski. Analiza termiczna związków wybuchowych. M. Domanińska-Krüger. Serje rezonansowe pary ołowiu. S. Szczeniowski. Prawdopodobieństwo przejścia elektronu do obszaru ujemnej energii. A. Piekara. Stała dielektryczna i polaryzacja elektryczna mieszanin w okolicy krytycznej temperatury rozpuszczania. A. Piekara. Asocjacja w roztworach nitrobenzenu i jego moment elektryczny. A. Piekara i J. Mazur. O zależności stałej dielektrycznej nitrobenzenu od temperatury. A. Piekara. Stała dielektryczna nitrobenzenu a jego wilgotność. W. S. Urbański. Odpowiedź na „Uwagi” A. Piekary. Cz. Reczynski i B. Skorobohatyj. O przenikaniu aktywnego wodoru przez słupkę rtęci. B. Skorobohatyj. O sorpcji gazów w lampie rtęciowej przy większej prężności pary. J. Kawa. Łuk rtęciowy przy zestalonej katodzie. E. Matula. Przejście ciągłe z rozładowania jarzącego w łuk w parach rtęci przy wyższych ciśnieniach. M. Wojciechowski. O oddziaływaniu wzajemnym dwóch źródeł akustycznych drgających synchronicznie. W. Scisłowski. O przewodnictwie elektrycznym sprasowanego siarczanu rtęciowego. T. Malarski i K. Gostkowski. O wpływie elektrolitów na elektryzowanie się wody przepływającej przez szklaną kapilarę. K. Gostkowski. O związku pomiędzy potencjałem elektrokinetycznym a przewodnictwem równowaznikowym. W. Świętosławski. O neutronowej równowadze pierwiastków niepromieniotwórczych. St. Kalinowski. O wyznaczaniu składowej poziomej metodą elektryczną. St. Kalinowski. O rejestracji zmian potencjału elektrycznego w Świdrze. I. St. Pasierbiński. Nowe serje rezonansowe w parze selenu.

* „Sprawozdania i Prace Polskiego Tow. Fizycznego” (których ukazało się ogółem 5 tomów) przybrały obecnie nazwę „Acta Physica Polonica”.

Rozwiązania zadań¹

97. Rozważam wyrażenia następujące:

$$P_N = \frac{1}{2^N} \sum_{\substack{m \leq \frac{N}{2} \\ m > \frac{N}{2} - A\sqrt{N}}} \binom{N}{m}$$

$$Q_N = \frac{1}{2^N} \sum_{\substack{m \leq \frac{N}{2} \\ m > N\Theta}} \binom{N}{m}$$

$$R_N = \frac{1}{2^N} \sum_{\substack{m \leq N \\ m \geq 0}} \binom{N}{m}$$

Symbol $\sum_{\substack{m < b \\ m > a}}$ oznacza: „suma składników, dla których m przebiega wszystkie wartości całkowite zawarte między a i b ”.

$$\binom{N}{m} = \frac{N!}{m!(N-m)!}$$

$$0 < \Theta < \frac{1}{2}$$

We wszystkich niemal podręcznikach rachunku prawdopodobieństwa znajdujemy dowód istnienia i obliczenie granicy $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N$. Rozwiązania zadań 94—96 dały nam możliwość podania tego dowodu prościej i krócej, niż to się robi zazwyczaj. Mianowicie:

wobec istnienia granicy (b) możemy zastąpić rozważanie $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N$ przez badanie wyrażenia następującego:

$$(t) \quad \alpha \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2^N} \sum_{\substack{m \leq \frac{N}{2} \\ m > \frac{N}{2} - A\sqrt{N}}} \frac{N^N}{m^m (N-m)^{N-m}} \sqrt{\frac{N}{m(N-m)}}$$

Przy

$$m > \frac{N}{2} - A\sqrt{N}$$

mamy:

$$u = \frac{2m-N}{N} > -\frac{2A}{\sqrt{N}}; \quad u^2 < \frac{4A^2}{N}$$

$$(u) \quad \frac{2}{\sqrt{N}} < \sqrt{\frac{N}{m(N-m)}} = \sqrt{\frac{2}{N(1-u^2)}} < \frac{2}{\sqrt{1-\frac{4A^2}{N}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Kładziemy:

$$q = \frac{N}{2} - m; \quad p = 2q = N - 2m$$

¹ Por. rozw. zad. 95—96 (tom VII, str. 177).

Mamy: przy $m > \frac{N}{2} - A\sqrt{N}$

$$\frac{p}{N} = \frac{N-2m}{N} < \frac{2A}{\sqrt{N}}; \quad \frac{p^4}{12N^4} < \frac{16A^4}{12N} < 2 \cdot \frac{A^4}{N}$$

a więc tembardziej:

$$p^2 < (1 - \frac{1}{2}) N^2$$

Stosując nierówność (s)¹, możemy napisać:

$$e^{-\frac{p^2}{2N}} \cdot e^{-\frac{16A^4}{12N}} < \frac{N^N}{2^N m^m (N-m)^{N-m}} = \sqrt{\frac{1}{(1-\frac{P}{N})^{N-q}} \cdot \frac{1}{(1+\frac{P}{N})^{N+p}}} < e^{-\frac{p^2}{2N}}$$

czyli

$$(v) \quad e^{-\frac{2q^2}{N}} \cdot e^{-\frac{2A^4}{N}} < \frac{N^N}{2^N m^m (N-m)^{N-m}} < e^{-\frac{2q^2}{N}} = e^{-2\left(\frac{q}{\sqrt{N}}\right)^2}$$

Jeśli teraz zestawimy nierówności (u) i (v) oraz uwzględnimy, że nierówność

$$\frac{N}{2} - A\sqrt{N} < m \leq \frac{N}{2}$$

jest równoważna nierówności:

$$0 \leq q < A\sqrt{N}$$

możemy orzec: przez skreślenie czynników jednostajnie dążących do 1 (przy $N \rightarrow \infty$) wyrażenie (t) staje się identycznym z wyrażeniem następującym

$$(w) \quad \alpha \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{q \geq 0} \frac{2}{\sqrt{N}} e^{-2\left(\frac{q}{\sqrt{N}}\right)^2} = 2\alpha \int_{t=0}^{t=A} e^{-2t^2} dt = \alpha \sqrt{2} \int_0^{\frac{A}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx$$

Mamy więc

$$(x) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} P_N = \alpha \sqrt{2} \int_0^{\frac{A}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx = \alpha \int_0^{\frac{A}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Gdy $\frac{N}{2}$ nie jest liczbą całkowitą (N nieparzyste) mamy oczywiście

$$(y) \quad (R_N + Q_N + P_N) = \sum_{m \leq \frac{N}{2}} \frac{1}{2^N} \binom{N}{m} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^N = 1$$

gdy $\frac{N}{2}$ jest całkowite (N parzyste)

$2(R_N + Q_N + P_N)$ różni się od 1 tylko o składnik dążący do zera, gdy $N \rightarrow \infty$.

Wiemy (zadanie 95), że $\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = 0$, wykazaliśmy przed chwilą istnienie $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N$; ponieważ (jak to zauważyliśmy powyżej) $2(P_N + Q_N + R_N)$ bądź równa się 1, bądź dąży do 1, przeto granica

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N \text{ musi istnieć.}$$

c. b. d. d.

¹ P. rozw. zad. 96 (tom VII, str. 177).

Oszacowanie Q_N i obliczenie α (wzór Stirlinga (b)).

Oszacowanie Q_N przy dużych wartościach N nie wymaga dowodu istnienia $\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N$ ani nierówności podanej w uzupełnieniu rozwiązania zadania 96.

Otrzymujemy je z nierówności podanej w rozwiązaniu zadania 96.

Przy dostatecznie wielkim N mamy oczywiście:

$$Q_N < 2^{\frac{N}{2}} \sum_{m \geq \theta}^{\frac{N}{2} - A\sqrt{N}} \frac{1}{2^N} \cdot \frac{N^N}{m^m (N-m)^{N-m}} \frac{N}{m(N-m)} \sqrt{\frac{N}{m(N-m)}}$$

$$\text{przy } m > N\theta \text{ mamy: } |u| = \frac{|2m - N|}{N} < 1 - 2\theta$$

$$\sqrt{\frac{N}{m(N-m)}} < \frac{1}{\sqrt{Nu(1-u)}}$$

$$\frac{N^N}{2^N m^m (N-m)^{N-m}} < e^{-\frac{p^2}{2N}} = e^{-2\frac{b^2}{N}};$$

nierówność

$$N\theta < m \leq \frac{N}{2} - A\sqrt{N}$$

jest równoważna nierówności następującej:

$$A\sqrt{N} \leq q < N(\frac{1}{2} - \theta)$$

przeto

$$Q_N < \frac{2\alpha}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{q > A\sqrt{N}}^{q < N(\frac{1}{2} - \theta)} e^{-\frac{2}{N}q} < \frac{2\alpha}{\sqrt{\theta(1-\theta)}N} \sum_{q < A\sqrt{N}}^{\sim} e^{-\frac{2}{N}q^2}$$

Obliczmy stosunek dwóch kolejnych wyrazów szeregu powyższego. Stosunek ten wynosi (dla $q > A\sqrt{N}$)

$$e^{-\frac{2}{N}(q+1)^2} : e^{-\frac{2}{N}q^2} = e^{-\frac{2}{N}(2q+1)} < e^{-\frac{4A}{\sqrt{N}}}.$$

przeto suma szeregu powyższego jest mniejsza od sumy postępu geometrycznego o wykładniku równym $e^{\frac{4A}{\sqrt{N}}}$ i pierwszym wyrazie równym e^{-2A^2}

mamy więc (przy N dość wielkim)

$$(z) \quad Q_N < \frac{2\alpha}{\sqrt{\theta(1-\theta)}N} \cdot \frac{e^{-2A^2}}{1 - e^{\frac{4A}{\sqrt{N}}}} < \frac{4\alpha}{\sqrt{\theta(1-\theta)}N} \cdot \frac{e^{-2A^2}}{\frac{4A}{\sqrt{N}}} = \frac{\alpha e^{-2A^2}}{\sqrt{\theta(1-\theta)}A}$$

Niech teraz będzie dana dowolnie mała liczba dodatnia ε .

Obierzmy A dość wielkie by było (i zarazem N dość wielkie by zachodziło (z))

$$(aa) \quad 0 < Q_N < \frac{\alpha e^{-2A^2}}{\sqrt{\theta(1-\theta)}A} < \varepsilon$$

Niech N będzie tak wielkie, by nadto było:

$$(bb) \quad 0 < R_N < \varepsilon$$

$$(cc) \quad -\varepsilon < P_N - \alpha \sqrt{\frac{A}{2}} \int_0^{\frac{A}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx < +\varepsilon$$

Sumując (aa), (bb) i (cc) znajdujemy:

$$\varepsilon < Q_N + R_N + P_N - \alpha \sqrt{\frac{A}{2}} \int_0^{\frac{A}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx < 3\varepsilon$$

skąd pamiętając, że $Q_N + R_N + P_N$ bądź równa się $\frac{1}{2}$, bądź dąży do $\frac{1}{2}$ i że ε jest dowolną liczbą dodatnią (byleby A było dość duże), wnioskujemy z nierówności powyższej, że

$$\frac{1}{2} - \alpha \sqrt{\frac{A}{2}} \int_0^{\frac{A}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx = O$$

Ponieważ

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

więc

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Korespondencja

Inż. B. S. Nie skorzystamy. Wywody przedstawione w nadesłanej pracy były znane już przed Newtonem (wspomina o tem m. inn. Gino Loria w „Theorie der algebraischen Kurven”). Prosimy porozumieć się z p. prof. dr. A. Zygmundem.

K. J. Treść nadesłanego artykułu jest zbyt specjalna i zainteresuje przeważnie mierzniaków. Z tego powodu nie skorzystamy.

Wł. S. Nie skorzystamy. Wzory otrzymane przez Pana są bardzo dobrze znane i znajdują się w każdym niemal podręczniku rachunku różn. i całkow. Wywody zbyt skomplikowane dają się znacznie uprościć.

Fr. A. Artykuł jest banalny i nie nadaje się do „Mathesis Polskiej”.

Redaktor: St. Warhaftman

Wydawca: „Mathesis Polska”

Zeszyt wydano w grudniu 1933.

Drukarnia Krajowa w Warszawie, Chłodna 44. Telefon 5.88-70.



Wodospad Harspränge w Laponji

Mazyw Kebnekaise od jeziora
Ladtjajaure

NAJPOCZYTNIEJSZE CZASOPISMO
POPULARNO-NAUKOWE

PRZYRODA I TECHNIKA

WYCHODZI OD R. 1922 ZESZYTAMI CO MIESIĄC Z WYJĄTKIEM LIPCA I SIERPNIA

Najlepszy informator o postępie i rozwoju nauk przyrodniczych i technicznych
w najszerszym pojęciu. Obejmuje rocznie 480 stron druku i ponad 100 ilustracji.

Przystępny dla każdej średnio inteligentnej jednostki.

PRENUMERATA:

rocznie 10 zeszytów zł 8,40 — półrocznie (5 zeszytów) zł 4,20

ADMINISTRACJA:

KSIĄŻNICA - ATLAS S. A.

LWÓW, CZARNIECKIEGO 12

P. K. O. 500.800

WARSZAWA, NOWY ŚWIAT 59

P. K. O. 12.802

Liczne głosy uznania ze strony prasy tak codziennej, jak i fachowej, oraz polecenie Ministerstwa W. R. i O. P. do bibliotek szkolnych, świadczy o wysokiej wartości tego wydawnictwa.



Byrd na biegunie południowym. Monoplan „Floyd Bennet”.

DR LEOPOLD INFELD

Docent Uniw. J. K. we Lwowie

NOWE DROGI NAUKI

KWANTY I MATERJA

*Str. X, 283, 27 fig. w tekście i na tabl. oraz 3 portr. 1933.**W opr. płóc. zł 11,60.*

(Z Dziedziny Nauki i Techniki. Tom 2)

TREŚĆ: O metodach myślenia w fizyce. — Promieniowanie. — Materja.
Jądro atomowe. — Promieniowanie i materja. — Nowa mecha-
nika kwantowa.

„MATHESIS POLSKA“, WARSZAWA, MARSZAŁKOWSKA 81.
TEL. 9.40-14. P. K. O. 12628.

DR WACŁAW WERNER

ELEKTRYCZNOŚĆ i MAGNETYZM

(Odbitka z t. II. „Dziejów Rozwoju Fizyki“)

Str. IV, 184 z 36 fig.

Zł 9,80

Teorja fluidów elektrycznych. — Prądy galwaniczne. — Działanie magne-
tyczne prądów galwanicznych. — Dzieło Faradaya. — Teorja pól elektro-
magnetycznych. — Drgania i fale elektromagnetyczne.

DR STANISŁAW ZIEMECKI

PROMIENIOWANIE

(Odbitka z t. II. „Dziejów Rozwoju Fizyki“)

Str. IV, 342 z 131 fig.

Zł 13,80

Optyka geometryczna. — Barwy. — Teorja światła. — Eter. — Kwanty
i fale materji. — Optyka ciał w ruchu będących. — Ciśnienie światła. —
Teorja względności. — Widmo fal elektromagnetycznych.

DR STANISŁAW ZIEMECKI

BUDOWA MATERJI

(Odbitka z t. II. „Dziejów Rozwoju Fizyki“)

Str. IV, 151 z 43 fig.

Zł 8,80

Części składowe atomów. — Promieniowanie i mechanika atomu.

NAKŁAD „MATHESIS POLSKIEJ“. WARSZAWA, MARSZAŁKOWSKA 81.
TEL. 940-14. P. K. O. 12628.